Universidad Tecnológica Nacional Regional Bs.As. | **Análisis Matemático II** | **Primer Parcial** | **Tema 1**

fecha: 13-10-18 | Curso | Prof. Amed

- Apellido y Nombre : ....

Teórico 1) Demostrar que si un campo escalar es diferenciable en $\bar{X}_0 \Rightarrow f$ es continua en $\bar{X}_0$

Teórico 2) a)Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. Defina conjunto de *nivel k de f*

b)Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo / $f(x,y)=\begin{cases} \operatorname{sen}(y+x).\operatorname{sen}(\pi y) & \text{si } x \geq 0 \\ x^2-y^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$

P 1) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x.y^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } x.y \neq 0 \\ \operatorname{sen}(5x+6y) & \text{si } x.y=0 \end{cases}$

Se pide : 1) Representar el D_f. 2)Analizar :a)Existencia del $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ b) Continuidad de f en (0,0)

c) Derivabilidad de f en $\bar{X}_0 = (0,0)$ $\forall \bar{u}$. d) $\bar{\nabla} f(\bar{X}_0)$ siendo $\bar{X}_0 = (0,0)$

e) ¿Se cumple $\forall \bar{u}$: $f'(\bar{X}_0,\bar{u}) = \bar{\nabla} f(\bar{X}_0) \bullet \bar{u}$? siendo $\bar{X}_0 = (0,0)$. Fundamente f)¿Es f diferenciable en (0,0)?

P 2) Dada $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(u,v) = \cos(u.v^3)+v^2+5v$ con $u=\pi.x.y$

$v=\varphi(x,y)$ definida implícitamente por $v.x+e^{v(y-1)}-2=0$ resulta $z=h(x,y)$

a)Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de h en $(1;1;z_0)$

b)Calcular aproximadamente **h(1,02 ; 0,98)**

P 3) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y,z)=x^2+2y^2-z+6$ .Halle la derivada direccional de "f" en $\bar{X}_0=(2,2,2)$

a) respecto de un versor tangente a la curva "C" en $\bar{P}_0=(1,1,z_0)$ / "C" $=S_1 \cap S_2$.

Construya una función vectorial a tal efecto. b) respecto de un versor normal a S_2 en $\bar{P}_0=(1,1,z_0)$

S_1 es superficie de nivel "6" correspondiente al campo f, mientras que S_2 tiene ecuación : $z=4-x^2$

– Represente la curva " C "en el primer octante.

P4)Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ .Si la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ tiene plano tangente de ecuación:

$2x+y-3z=3$ en el punto $(3,3,z_0)$. Se pide: a) Calcular $f'((3;3),\bar{u})$ si $\bar{u}$ es tangente en $\bar{A}=(2,2)$

a la curva de nivel cero del campo $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ // $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-8}{\sqrt{x.y}} & \text{si } x.y>0 \\ \operatorname{sen}(\pi y-\pi x) & \text{si } x.y \leq 0 \end{cases}$

b)Expresar analítica y gráficamente el D_g *y* su conjunto de nivel "0"

AM2	1° parcial	HOJA N° 1/5
	Prof. Amed	FECHA 13-10-18

$\boxed{T1}$ Demostrar que si un campo escalar es diferenciable en $\bar{X}_0$ $\Rightarrow$ f es continua en $\bar{X}_0$

$\vec{N}$: vector incremento

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{X}_0 \in D$

f diferenciable en $\bar{X}_0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\bar{X}_0 + \bar{N}) - f(\bar{X}_0) = \nabla f(\bar{X}_0) \cdot \vec{N} + \varepsilon(\bar{N}) \, \|\bar{N}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{N} \to \bar{0}} f(\bar{X}_0 + \bar{N}) - \underbrace{\lim_{\bar{N} \to \bar{0}} f(\bar{X}_0)}_{\text{I} \; \to f(\bar{X}_0)} = \underbrace{\lim_{\bar{N} \to \bar{0}} \nabla f(\bar{X}_0) \underbrace{\vec{N}}_{\to 0}}_{\text{II} \; \to 0} + \underbrace{\underbrace{\lim_{\bar{N} \to \bar{0}} \varepsilon(\bar{N})}_{\text{III} \; \to 0} \underbrace{\|\vec{N}\|}_{\to 0}}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{N} \to \bar{0}} f(\bar{X}_0 + \bar{N}) = f(\bar{X}_0) \Rightarrow \text{ f es continua en } \bar{X}_0$$

I $\bar{X}_0 \in D \Rightarrow \exists f(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{\bar{N} \to \bar{0}} f(x_0) = f(x_0)$

II f dif en $\bar{X}_0 \Rightarrow \exists \nabla f \bar{X}_0 \Rightarrow \exists \lim_{\vec{N} \to 0} \nabla f(\bar{X}_0)$ pues $\nabla f \bar{X}_0$ no depende de $\bar{N}$

$$\lim_{\bar{N} \to 0} \nabla f(\bar{X}_0) \cdot \bar{N} = 0$$

III f dif en $x_0 \Rightarrow \lim_{\vec{N} \to \bar{0}} \varepsilon(\bar{N}) = 0$

NOTA

T2 a) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. Definir conjunto de nivel k de f

$$C_k = \{(x,y) \in D \,/\, f(x,y) = k\}$$

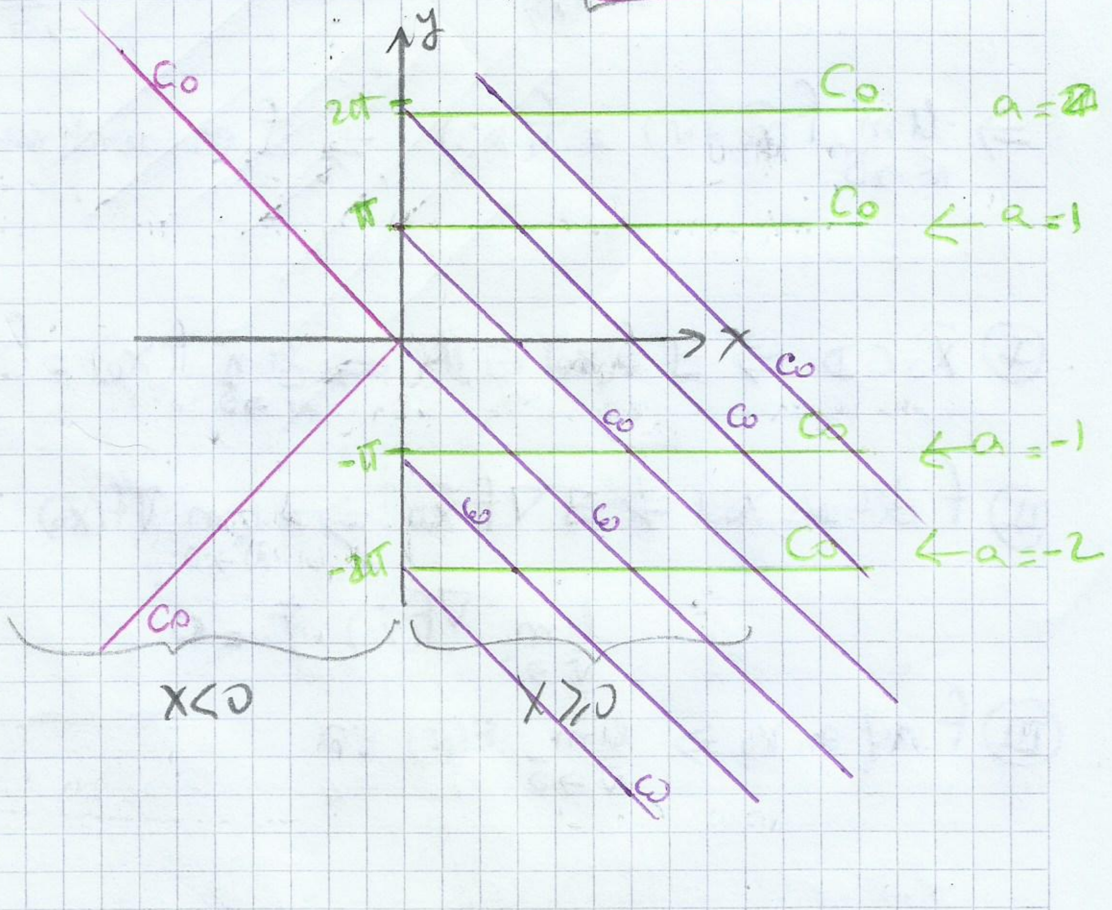
b) Hallar el conj. de nivel 0 de f y representarlo

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(y+x)\operatorname{sen}(\pi y) & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } x \geq 0}$ $\operatorname{sen}(y+x)\operatorname{sen}(\pi y) = 0 \to \boxed{y = a\pi}$ $a \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen}(y+x) = 0 \Rightarrow y + x = k\pi \to \boxed{y = a\pi - x}$

$\boxed{\text{Si } x < 0}$ $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \boxed{|x| = |y|}$



NOTA

AM 2	1° parcial Prof. Amed	HOJA N° 2/5 FECHA 13-10-18

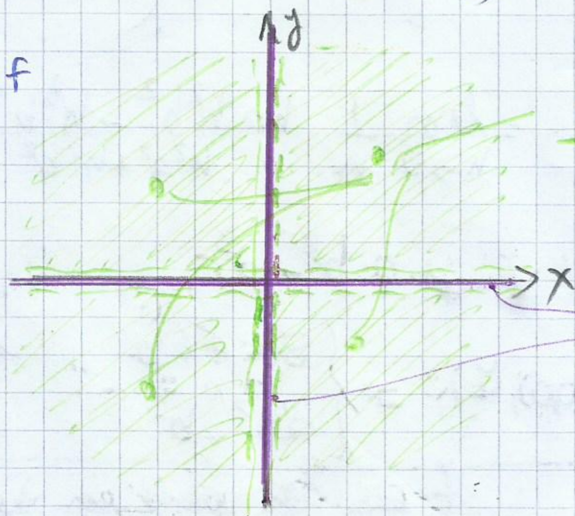
(P1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ /

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ \operatorname{sen}(5x+6y) & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Se pide:

A) Representar el Df

Dom(f) = $\mathbb{R}^2$



$\dfrac{xy^2 - y^3}{x^2+y^2} = f$

$\operatorname{sen}(5x+6y) = f$

B) Analizar:

a) Existencia del $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

si $xy=0$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(\overset{\to 0}{5x} + \overset{\to 0}{6y}) = 0$ (I)

si $xy \neq 0$: $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2 - y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{x} \underbrace{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{acot}} - \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{acot}} \overset{\to 0}{y} =$

$= 0$ (II)

(I) = (II) $\Rightarrow \boxed{\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}$

b) Continuidad de f en (0,0)

- $f(0,0) = 0$
- $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ✓ $= 0$

$\Rightarrow \therefore$ $\boxed{\text{f es continua en (0,0)}}$

c) Derivabilidad de f en $x_0 = (0,0)$ $\forall \check{u}$ $\quad \check{u} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\check{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\check{u}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \longrightarrow$$

NOTA

$\rightarrow$ $\boxed{\text{si } a.b=0}$: $= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(5ha+6hb)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq 0}} \frac{\text{sen}(h(5a+6b))}{h} =$

$a=0$
$\vee$
$b=0$
no pueden ser los 2 ceros al mismo tiempo

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h(5a+6b))}{h} \cdot \frac{(5a+6b)}{\underbrace{(5a+6b)}_{\neq 0}} = 5a+6b$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{si } a.b \neq 0}$: $= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{ha\,h^2b^2 - h^3b^3}{h^2a^2+h^2b^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^3(ab^2-b^3)}{h^2\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}} =$

$a\neq 0 \wedge b\neq 0$

$= ab^2 - b^3$

$$\boxed{f'_{((0,0),\ddot{u})} = \begin{cases} 5a+6b & \text{si } a.b=0 \\ ab^2-b^3 & \text{si } ab\neq 0 \end{cases}}$$

f ES derivable en toda dirección (en (0,0))

d) $\bar{\nabla} f(\bar{x}_0)$ siendo $\bar{x}_0 = (0,0)$

$f'_{x(0,0)} = f'_{((0,0),(\overset{a=1}{1},\overset{b=0}{0}))} = 5\times 1 + 6\times 0 = 5 = f'_{x(0,0)}$

$f'_{y(0,0)} = f'_{((0,0),(0,1))} = 5\times 0 + 6\times 1 = 6 = f'_{y(0,0)}$

$\boxed{\bar{\nabla} f_{(0,0)} = (5,6)}$

e) ¿Se cumple $\forall \ddot{u}$: $f'(\bar{x}_0, u) = \bar{\nabla} f(\bar{x}_0).\ddot{u}$? siendo $\bar{x}_0 = (0,0)$

NO, si $\ddot{u} = \left(\underset{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \underset{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$: x defin. $f'_{((0,0),\ddot{u})} \overset{a.b\neq 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = 0$

$\neq$

$\bar{\nabla} f_{(0,0)}\,\ddot{u} = (5,6)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{11}{\sqrt{2}}$

f) ¿es diferenciable en (0,0)?

NO. Si f fuese diferenciable $\Rightarrow f'_{(\bar{x}_0,\ddot{u})} = \bar{\nabla} f_{(0,0)}\,\ddot{u}$ y en el punto anterior se mostró que no es así

NOTA

AM2	1º parcial Prof. Amed	HOJA Nº 3/5 FECHA 13-10-18

(P2) Dada $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(u,v) = \cos(u \cdot v^3) + v^2 + 5v$

con $u = \pi x y$, $v = \varphi(x,y)$ definida implícitamente por

$vx + e^{v(y-1)} - 2 = 0$ resulta $z = h(x,y)$

a) Hallar la ec. del plano tangente a la gráfica de h en $(1,1,20)$

ec. del plano tang a la gráfica de h en $(1,1,20)$

$$z = h(1,1) + h'_x(1,1)(x-1) + h'_y(1,1)(y-1)$$

sea $\bar{g}(x,y) = (\pi x y, \varphi(x,y))$ $\quad z = f(u,v) = h(x,y) = \underbrace{h(\bar{g}(x,y))}_{\in C'}$

$> \bar{g} \in C'$ $\quad f \in C'$

h es composición de funciones $C' \Rightarrow Dh(x,y) = Df(\bar{g}(x,y))\, D\bar{g}(x,y)$

$$\boxed{Dh(1,1) = Df(\bar{g}(1,1))\, D\bar{g}(1,1)}$$

$\boxed{\bar{g}(1,1) = (\pi, \varphi(1,1)) = (\pi, 1)}$ I $\quad D\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \pi y & \pi x \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} \to D\bar{g}(1,1) = \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ II

$\varphi(1,1) = v$, $\quad F(x,y,v) = vx + e^{v(y-1)} - 2$

x T.F.I $\quad F(1,1,v_0) = 0 = v_0 + e^{v_0(1-1)} - 2 \to \boxed{v_0 = \boxed{1} = \varphi(1,1)}$

$$\varphi'_x(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_v(1,1,1)} = -\frac{v}{x + e^{v(y-1)}(y-1)}\Bigg|_{(1,1)} = -\frac{1}{1+0} = \boxed{-1 = \varphi'_x(1,1)}$$

$$\varphi'_y(1,1) = -\frac{F'_y(1,1,1)}{F'_v(1,1,1)} = -\frac{e^{v(y-1)}\,v}{1} = \boxed{-1 = \varphi'_y(1,1)}$$

$$Dh(1,1) = Df_{(\pi,1)} \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

sen $\pi = 0$

$f'_u = -\text{sen}(uv^3) \cdot v^3 \longrightarrow f'_u(\pi,1) = 0$

$f'_v = -\text{sen}(uv^3)\, u 3v^2 + 2v + 5 \to f'_v(\pi,1) = 7$

$$(*)\; Dh(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi & \pi \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{cases} h'_x(1,1) = -7 \\ h'_y(1,1) = -7 \end{cases}$$

NOTA

$h(1,1) = f(\pi,1) = \cos(\pi \cdot 1^3) + 1^2 + 5 \times 1 = \boxed{5 = h(1,1)}$

Ec, plano tang.

$$z = 5 - 7(x-1) - 7(y-1) =$$

$$= 5 - 7x + 7 - 7y + 7 = -7x - 7y + 19$$

$$\boxed{z = -7x - 7y + 19}$$

b) Calcular, aproximadamente $h(1.02;0.98)$

$$h(1.02;0.98) \cong -7(1,02) - 7(0,98) + 19 = 5$$

$$\boxed{h(1.02, 0.98) \cong 5}$$

NOTA

(P3) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z + 6$. Halla la derivada direccional de f en $\bar{X}_0 = (2,2,2)$

a) respecto de un vector tangente a la curva C en $\bar{P}_0 = (1,1,z_0)$ tal que $C = S_1 \cap S_2$. S_1: sup de nivel 6 de f

$S_2: z = 4 - x^2$

Construir una función vectorial de C.

f es diferenciable (polinomio) $\Rightarrow \boxed{f'((2,2,2),\breve{u}) = \nabla f_{(2,2,2)} \cdot \breve{u}}$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x \\ f'_y = 4y \\ f'_z = -1 \end{array}\right\} \nabla f_{(2,2,2)} = (4,8,-1)$$

$$\begin{cases} S_1: x^2+2y^2-z+6 = 6 \to z = x^2+2y^2 \\ S_2: z = 4-x^2 \end{cases} \to x^2+2y^2 = 4-x^2$$

$$C: \begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ z = 4-x^2 \end{cases}$$

$$\boxed{C: \bar{\beta}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), 4-2\cos^2(t))}$$

$P_0 \in S_2 \therefore z_0 = 4 - 1^2$

$z_0 = 3$

$\boxed{P_0 = (1,1,3)}$

$$\bar{P}_0 = \underbrace{(1, 1, 3)}_{\Rightarrow t = \frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{\beta}'(t) = (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), +4\,\mathrm{sen}(t)\cos(t))$$

$$\vec{u}_1 = \bar{\beta}'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = (-1,1,2) \to \breve{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$$

$$f'((2,2,2),\breve{u}_1) = (4,8,-1)\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{f'((2,2,2),\breve{u}_1) = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

NOTA

b) respecto de un versor normal a S_2 en $\bar{P}_0 = (1,1,z_0)$

Representar la curva C en el 1° octante

$\breve{\mu}_2 \perp S_2 \Rightarrow \bar{\mu}_2 \ // N_{S_2}$

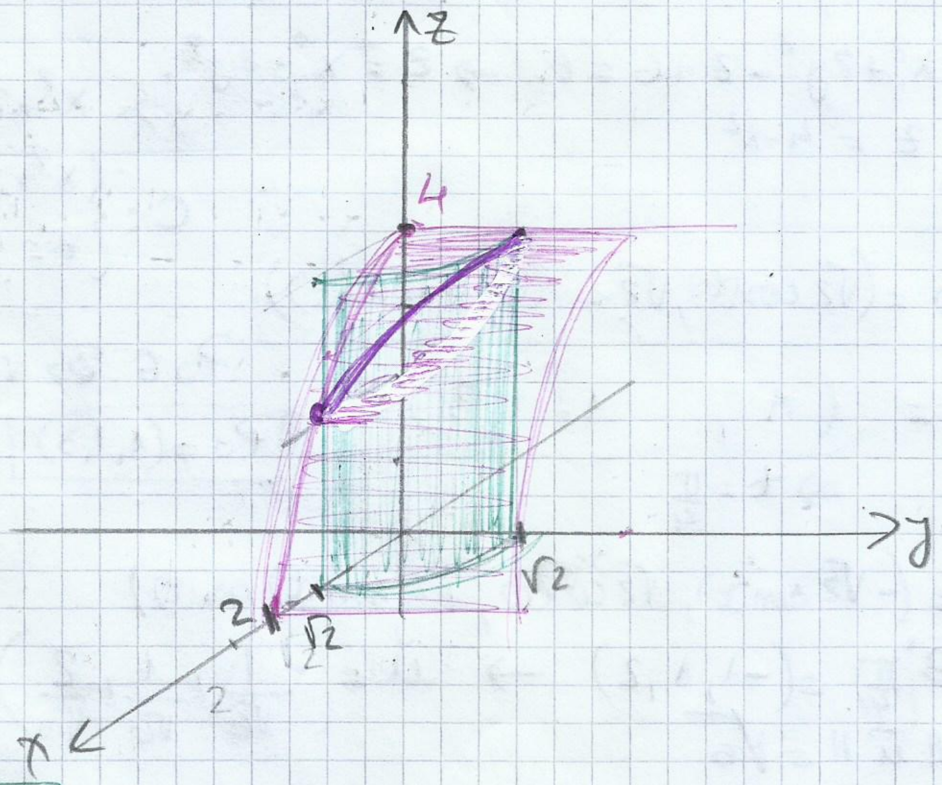
$S_2: \ z + x^2 - 4 = 0 \rightarrow N_S = (2x, 0, 1)$

en $P_0 \rightarrow \boxed{N_{S_P} = (2, 0, 1)}$ $\quad \|N_{SP}\| = \sqrt{5}$

$$\boxed{\breve{\mu}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$f'((2,2,2), \breve{\mu}_2) = \nabla f_{(2,2,2)} \cdot \breve{\mu}_2 = (4, 8, -1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{f'((2,2,2), \breve{\mu}_2) = \frac{7}{\sqrt{5}}}$$



$$C: \begin{cases} \boxed{x^2 + y^2 = 2} \\ \boxed{z = 4 - x^2} \end{cases}$$

$\underbrace{\text{en } y = 0}_{\text{plano } xz}$: $\begin{cases} x^2 = 2 \\ z = 4 - x^2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$

NOTA

AM 2 | 1° parcial | Prof. Amed | HOJA N° 5/5 | FECHA 13-10-18

P4) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si la sup de ecuación $z = f(x,y)$ tiene plano tangente de ecuación: $2x + y - 3z = 3$ en el punto $(3,3,z_0)$
Se pide:

a) Calcular $f'((3,3), \breve{u})$ si $\breve{u}$ es tangente en $A = (2,2)$ a la curva de nivel 0 de $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ /

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-8}{\sqrt{xy}} & \text{si } xy > 0 \\ \sin(\pi y - \pi x) & \text{si } xy \leq 0 \end{cases}$$

en $(3,3,z_0)$ el plano tangente a la gráfica de f es:

$$\frac{2x + y - 3z}{3} = \frac{3}{3} \to z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 1$$

en $(3,3,z_0)$

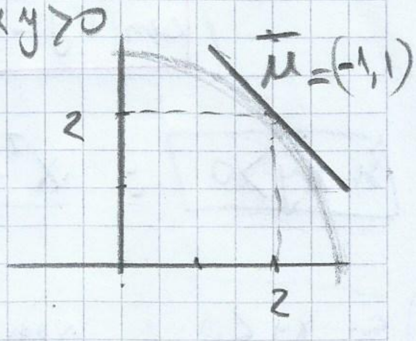
$$z_0 = \frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 3 - 1 = 2 \to \boxed{P = (3,3,2)}$$

f admite plano tang $\Rightarrow$ f es diferenciable $\Rightarrow \boxed{f'((3,3)\breve{u}) = \nabla f(3,3) \cdot \breve{u}}$

$\breve{u}$ es tang a la C_0 de g en $(2,2) \to (2,2) \in xy > 0$

$$\Rightarrow \text{busco } \frac{x^2+y^2-8}{\sqrt{xy}} = 0 \to \boxed{x^2+y^2 = 8}$$

$$\boxed{\breve{u} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$



ec. pl. tang:
$$z = f(3,3) + f'_x(3,3)(x-3) + f'_y(3,3)(y-3)$$

x enunc
$$z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 1 \longrightarrow \left.\begin{aligned} f'_x(3,3) &= 2/3 \\ f'_y(3,3) &= 1/3 \end{aligned}\right\} \nabla f(3,3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

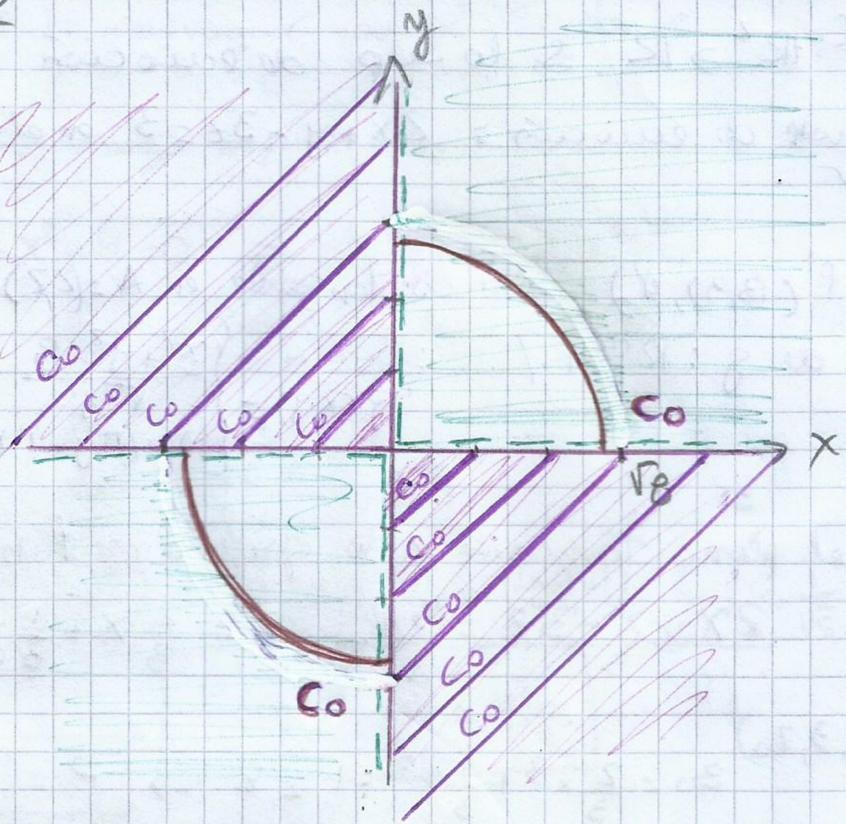
$$f'((3,3), \breve{u}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\boxed{f'((3,3), \breve{u}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

NOTA

b) Expresar analítico y gráficamente el Dg y su conjunto de nivel 0

$D(g) = \mathbb{R}^2$



$$g(x,y) = \begin{cases} \boxed{\dfrac{x^2+y^2-8}{\sqrt{xy}} \quad \text{si } xy>0} \\ \boxed{\operatorname{sen}(\pi y - \pi x) \quad \text{si } xy \leq 0} \end{cases}$$

$\boxed{\text{si } xy>0}$: $\dfrac{x^2+y^2-8}{\sqrt{xy}} = 0 \rightarrow x^2+y^2 = 8$: C_0

$\boxed{\text{si } xy \leq 0}$: $\operatorname{sen}(\pi(y-x)) = 0 \Rightarrow y - x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$y = k\pi + x$

NOTA